CHAPITRE 23

THÉORÈMES DE DINI

Soit (E, d) un espace métrique.

Théorème 23.0.1: Théorème des compacts emboîtés

Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de compacts non vides. Alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est un compact non vide.

Démonstration. Notons $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Comme $K \subset K_0$ et que K_0 est compact on a que K est compact si et seulement si K est fermé. Or une intersection quelconque de fermé est fermé donc K est fermé et par suite K est compact. Montrons la non vacuité. Par hypothèse, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in K_n$. La suite $(x_n)_n$ est en particulier une suite d'éléments de K_0. Comme K_0 est compact, cette suite admet une valeur d'adhérence $l \in K_0$. Montrons que $l \in K$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Par décroissance de la suite $(K_n)_n$ la suite $(x_{n+k})_n$ est une suite d'éléments de K_k. Or l est une valeur d'adhérence de la suite $(x_{n+k})_n$ donc comme K_k est fermé on a $l \in K_k$. Ceci étant vrai pour tout k on en déduit que $l \in K$. $\square$

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un segment.

Lemme 23.0.2

Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions continues sur I, qui converge simplement vers la fonction nulle. Alors la convergence est uniforme.

Démonstration. Remarquons que les hypothèses assurent que pour tout $n \in \mathbb{N},\ g_n \geq 0$. Si la convergence n'est pas uniforme, alors il existe $\varepsilon > 0,\ \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une extractrice et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ g_{\varphi(n)}(x_n) > \varepsilon.$$

Comme $\varphi \geq \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ et la suite $(g_n)_n$ est décroissante on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ g_n(x_n) \geq g_{\varphi(n)}(x_n) > \varepsilon.$$

Par le théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS comme I est un segment, il existe $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une extractrice et $l \in I$ tels que $x_{\gamma(n)} \to l$. Fixons $n \in \mathbb{N}$. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\gamma(k) \geq n$ on a

$$\varepsilon < g_{\gamma(k)}(x_{\gamma(k)}) \leq g_n(x_{\gamma(k)})$$

en faisant tendre k vers $+\infty$ on obtient

$$\varepsilon \leq g_n(l).$$

Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$ on obtient une contradiction (en faisant tendre n vers $+\infty$). $\square$

On propose une démonstration alternative.

Démonstration. Notons $\alpha_n = \|g_n\|_\infty$. Il s'agit de prouver que $\alpha_n \to 0$. Les hypothèses assurent que la suite $(\alpha_n)_n$ est décroissante et positive. Par le théorème de convergence monotone, il existe $\alpha \geq 0$ tel que $(\alpha_n)_n$ converge vers α. Supposons que $\alpha > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$K_n = \left\{ x \in I \mid g_n(x) \geq \frac{\alpha}{2} \right\}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $K_n \neq \emptyset$. De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, K_n est borné et fermé dans I en tant qu'image réciproque du fermé $\left[\frac{\alpha}{2}, +\infty\right[$ par la fonction continue g_n. Comme I est fermé, K_n est aussi fermé dans $\mathbb{R}$ pour tout n. La décroissance de la suite $(g_n)_n$ assure la décroissance de la suite $(K_n)_n$. Par le théorème des compacts emboîtés $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est non vide. Donc il existe $c \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N},\ g_n(c) \geq \frac{\alpha}{2} > 0$$

cela contredit alors la convergence simple vers 0. □

Théorème 23.0.3: Premier théorème de DINI

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur I convergeant simplement vers une fonction f continue. Si la suite $(f_n)_n$ est monotone alors la convergence est uniforme.

Démonstration. On se ramène au lemme en posant
- $g_n = f_n - f$ (si la suite est décroissante)
- $g_n = f - f_n$ (si la suite est croissante).

□

Remarque 23.0.4

La conclusion est fausse si I n'est pas fermé.

Exemple 23.0.5

$I = [0, 1[$ et $f_n = x \mapsto x^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 23.0.6

Le même exemple que précédemment sur $I = [0, 1]$ montre que la conclusion est fausse si f n'est pas continue.

Remarque 23.0.7

La conclusion est fausse si I n'est pas borné. On peut par exemple considérer $I = \mathbb{R}$ et $f_n = x \mapsto (x-n)\chi_{]n,n+1[} + \chi_{[n+1,+\infty[}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 23.0.8: Second théorème de DINI

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suites de fonctions croissantes sur I (non nécessairement continues) convergeant simplement vers une fonction f continue. Alors la convergence est uniforme.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f est uniformément continue sur le segment I d'après le théorème de HEINE. Considérons $\eta > 0$ un module d'uniforme continuité de f pour ε et $S = (\min(I) = a_0 < a_1 < \cdots < a_{p-1} < a_p = \max(I))$ une subdivision de I de pas inférieur à η. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ et tout $i \in [\![0, p]\!]$, $|f(a_i) - f_n(a_i)| \leq \varepsilon$. Soit $n \geq n_0$ et $x \in I$. Supposons que $x \in [a_i, a_{i+1}]$ avec $i \in [\![0, p]\!]$. On a $|f(x) - f(a_i)| \leq \varepsilon$ et on peut alors écrire

$$\begin{aligned}
|f(x) - f_n(x)| &\leq |f(x) - f(a_i)| + |f(a_i) - f_n(a_i)| + |f_n(a_i) - f_n(x)| \\
&\leq \varepsilon + \varepsilon + f_n(x) - f_n(a_i) \\
&\leq 2\varepsilon + f_n(a_{i+1}) - f_n(a_i) \\
&\leq 2\varepsilon + |f_n(a_{i+1}) - f(a_{i+1})| + |f(a_{i+1}) - f(a_i)| + |f(a_i) - f_n(a_i)| \\
&\leq 5\varepsilon.
\end{aligned}$$

La convergence est donc uniforme. □

Exemple 23.0.9

La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_n : [-a,a] \to \mathbb{R}$ avec $f_n(x) = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ (où $a>0$) converge uniformément sur $[-a,a]$ vers $x \mapsto e^x$.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit F la fonction de répartition de X_1.
On rappelle que toute fonction de répartition est croissante, continue à droite, limitée à gauche, tend vers 0 en $-\infty$ et tend vers 1 en $+\infty$.

Lemme 23.0.10

On définit $F^{\leftarrow} : u \in]0,1[\mapsto \inf\{x\in\mathbb{R} \mid F(x) \geq u\}$. On a alors

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \forall u \in]0,1[,\ F^{\leftarrow}(u) \leq x \iff u \leq F(x).$$

Démonstration. Si $F^{\leftarrow}(u) \leq x$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a $F^{\leftarrow}(u) < x+\varepsilon$ ce qui implique $F(x+\varepsilon) \geq u$. En faisant tendre ε vers 0 on obtient par continuité à droite de F que $F(x) \geq u$. L'autre sens découle du fait qu'un infimum est un minorant. □

Corollaire 23.0.11

Soit Y une variable aléatoire réelle de fonction de répartition G et U telle que $U \rightsquigarrow \mathcal{U}([0,1])$. Alors $G^{\leftarrow}(U)$ a la même loi que Y (définie sur l'événement presque sûr $\{0<U<1\}$).

Proposition 23.0.12

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée continue à droite. Alors

$$\sup(\{|f(t)| \mid t\in\mathbb{R}\}) = \sup(\{|f(t)| \mid t \in \mathbb{Q}\}).$$

Théorème 23.0.13: Théorème de GLIVENKO-CANTELLI

Pour $t\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on pose

$$F_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{X_k \leq t\}}.$$

Alors, presque sûrement, $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |F_n(t) - F(t)| \to 0$.

Démonstration. On se ramène au cas de variables aléatoires suivant la loi uniforme sur $[0,1]$. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0,1]$ toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$. On a l'égalité de loi suivante pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |F_n(t) - F(t)| \sim \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{F^{\leftarrow}(U_k)\leq t\}} - F(t)\right|.$$

En effet, la fonction

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R}^n & \longmapsto & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) & \longrightarrow & \sup\left(\left\{\left|\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{x_k\leq t\}} - F(t)\right| \;\middle|\; t\in\mathbb{R}\right\}\right) = \sup\left(\left\{\left|\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{x_k\leq t\}} - F(t)\right| \;\middle|\; t\in\mathbb{Q}\right\}\right) \end{array}$$

est une fonction mesurable comme supremum de fonctions mesurables. Ainsi appliquer φ aux deux membres de l'identité en loi $(X_1, \dots, X_n) \sim (F^{\leftarrow}(U_1), \dots, F^{\leftarrow}(U_n))$ préserve l'identité en loi. Or

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{F^{\leftarrow}(U_k)\leq t\}} - F(t)\right| = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{U_k \leq F(t)\}} - F(t)\right| \leq \sup_{s\in[0,1]} \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{U_k\leq s\}} - s\right|.$$

Il suffit donc de traiter le cas de variables uniformes sur $[0,1]$. D'après la loi forte des grands nombres, pour tout $s \in [0,1]$, il existe $N_s \subset \Omega$ tel que $\mathbb{P}(N_s) = 0$ et

$$\forall \omega \in N_s^{\complement},\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{U_k(\omega)\leq s\}} \underset{n\to+\infty}{\to} s.$$

Comme une réunion dénombrable de négligeables est négligeable, il existe $N \subset \Omega$ tel que $\mathbb{P}(N) = 0$ et

$$\forall s \in [0,1]\cap\mathbb{Q},\ \forall \omega \in N^{\complement},\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{U_k(\omega)\leq s\}} \underset{n\to+\infty}{\to} s.$$

C'est encore vrai pour tout $s \in [0,1]$. En effet, soit $s \in [0,1]$ et $\varepsilon > 0$ et $\omega \in N$. Il existe $(p,q) \in \mathbb{Q}^2$ tels que $s-\varepsilon \leq p \leq s \leq q \leq s+\varepsilon$. Comme $s \mapsto \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{U_k(\omega)\leq s\}}$ est croissante,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{U_k(\omega)\leq p\}} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{U_k(\omega)\leq s\}} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{U_k(\omega)\leq q\}}$$

d'où

$$s-\varepsilon \leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{U_k(\omega)\leq s\}} \leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{U_k(\omega)\leq s\}} \leq s+\varepsilon.$$

On a donc montré, pour $\omega \in N^{\complement}$

— $s \mapsto \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{U_k(\omega)\leq s\}}$ est croissante pour tout $n \in \mathbb{N}^*$;

— $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{U_k(\omega)\leq s\}} \to s$ et $s \mapsto s$ est continue.

D'après le théorème de DINI, on a donc convergence uniforme presque partout. □